Matthias GLADE, Dortmund

Verläufe individueller Schematisierungsprozesse – vom Anteil vom Anteil zur Rechenregel

Fortschreitende Schematisierung

Altbekannt erscheint das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung als eines der Kernprinzipien von vorstellungsorientierten, und lernenden-aktivierenden Unterrichtskonzeptionen (Treffers 1987, Streefland 1991). Doch was ist Schematisierung genau, und wie verlaufen die Prozesse bei den Lernenden im Detail?

Unter Schematisierungsprozessen werden im Rahmen meines Dissertationsprojektes alle Prozesse begriffen, die von individuellen, informellen und durch Anschauungsmittel gestützten Lösungswegen zum Kalkül führen, gleich ob sie sich in Bildern, symbolischen Notationen, Sprache oder Handlungen manifestieren (Glade 2011 in Anlehnung an Treffers 1987). Diese Schematisierungsprozesse werden nicht als Abstraktion, sondern in Anlehnung an Aebli als Verdichtungen gefasst, um zu betonen, „dass der neue Begriff in Kontinuität an das bisherige Wissen anschließt und dass durch die Pyramide seiner Konstruktion hindurch die Bedeutungen weitergereicht werden, die im bisherigen Wissen und in der bisherigen Erfahrung angelegt sind" (Aebli 1981, 111). Diese Bedeutungsweitergabe soll die intendierte Verknüpfung von informellen vorstellungsbezogenen und kalkülmäßigen Wegen akzentuieren, anstatt die Entwicklung von Rechenregeln vornehmlich mit Vergessen verknüpfen (vgl. z.B. Krämers Dictum der „Kalkülisierung als Vergessenstechnik", Krämer 2003, 169.)

Lernumgebung zum Anteil vom Anteil

Ausgehend von Kontextproblemen wird das Konzept des Anteils vom Anteil entwickelt (Aufgabenmaterial nach Prediger et al. 2013, auch abgedruckt in Glade & Schink 2011) und Anteile von Anteilen in Rechteckbildern anschauungsgestützt bestimmt (vgl. Bilder im Kasten auf der übernächsten Seite). Daraus wird ein Kalkül-Weg zunächst nur für Stammbrüche (mit Zähler 1), dann für andere Brüche entwickelt. Dazu dienen die Schematisierungsimpulse im nebenstehenden Kasten.

Schematisierungsimpulse:

- Kann man das auch einfacher schreiben / lösen?
- Kann man das auch ohne das Zeichnen von Bildern lösen?
- Kannst du eine Regel finden?
- Begründe deine Regel.
- Moderationsimpulse: Vergleicht untereinander. Erklärt einander.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 423–426). Münster: WTM-Verlag

Forschungsdesign

Die Studie ist im Rahmen des langfristigen Entwicklungsforschungsprojekts KOSIMA (Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011) angesiedelt. Die Daten wurden in Designexperimenten (Gravemeijer & Cobb 2006) im Laborsetting mit 10 x 2 Sechstklässerinnen und -klässlern an einer nordrheinwestfälischen Gesamtschule und einem Gymnasium durch Videographie und Transkription erhoben.

Untersucht wurden Schematisierungsprozesse von 1-3 Schulstunden in oben skizzierter Lernumgebung, nicht wie oft üblich langfristige, über zum Teil Jahre angelegte Lernprozesse (vgl. z.B. Streefland 1991). Dies ermöglicht, die relevanten Prozesse auf einer Mikroebene zu rekonstruieren.

Die Analyse der Transkripte erfolgte auf der Basisebene durch Rekonstruktion der Theoreme- und Konzepte-in-Aktion (nach Vergnaud 1996), um sich den Prozessen interpretativ anzunähern. Die in der Basisanalyse rekonstruierten Konzepte- und Theoreme-in-Aktion wurden im zweiten Schritt durch deren intraindividuellen und interindividuellen Vergleich einheitlicher formuliert und ausgeschärft. Ihre Systematisierung zu einem strukturierten Analyseinstrument wird zusammen mit den Ergebnissen vorgestellt.

Einblicke in Prozess und Ergebnisse der Analyse

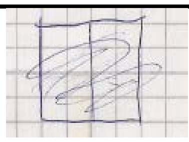
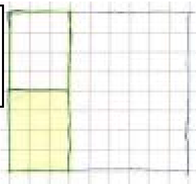
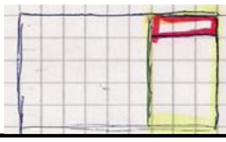
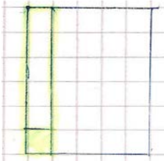
Die Untersuchung der rekonstruierten Konzepte und Theoreme-in-Aktion zeigte, dass sich die Entwicklung bei den jeweiligen Lernendenpaaren nicht unabhängig von den jeweiligen zu bearbeitenden Aufgaben beschreiben lässt. Stattdessen verlaufen die Schematisierungsprozesse entlang von Entwicklungslinien in „Handlungsaufgaben“, die sich auf die zu erledigenden Aufgabenstellungen beziehen (siehe Kasten).

Aufgabenstellung	*Handlungsaufgaben*
Zeichne ein Bild.	Ganzes **F**inden
	Ganzes **E**inteilen
Bestimme den Anteil vom Anteil.	Anteil vom Anteil **A**blesen
Versuche es ohne zu zeichnen.	Von Darstellungen **L**ösen

Es lassen sich entlang der Handlungsaufgaben Kategorien von Theoremen- und Konzepten-in-Aktion unterscheiden, die sukzessive in Schematisierungsprozessen durchlaufen werden. Diese inhaltlich unterscheidbaren Kategorien, die eine Beschreibung der Progression in der jeweiligen Handlungsaufgabe ermöglichen, bezeichne ich als **Schematisierungsstufen**.

Die hier vorgestellten Ebenen der Analyse sind in der Tabelle unten in konzentrierter Form angedeutet. (Theoreme-in-Aktion sind nicht abgedruckt. Für Transkriptauszüge vgl. Glade & Schink 2011.)

Schematisierungsstufen in der Handlungsaufgabe „Ganzes Finden“

Transkriptauszüge	**Konzept-in-Aktion**	**Schematisierungsstufe**
“Wie soll ich das in drei teilen?“ $\boxed{\frac{1}{2} \textit{von} \frac{1}{3}}$ 	Rechteck als beliebiges Ganzes	Unbestimmtes Ganzes wählen
„In der Länge habe ich 9 Kästchen gemacht, weil das kann man besser durch 3 teilen.“ „Die Länge habe ich gezählt. Die nach unten habe ich gar nicht gezählt.“ $\boxed{\frac{1}{2} \textit{von} \frac{1}{3}}$ 	Passung von einem Anteil und einer Seitenlänge / Ganzem als Teilbarkeit	Ein Anteil wird bei der Konzeption des Ganzen bewusst genutzt
„9 ist ja durch 3 teilbar, 3 mal 3 ist 9 und das ist dann ja ein Drittel jeweils.“ „Ich hätte bei der Größe 5 genommen. Weil 1/5.“  $\boxed{\frac{1}{5} \textit{von} \frac{1}{3}}$	Passung von zwei Anteilen und Seitenlängen / Ganzem	Beide Anteile werden bewusst bei der Konzeption des Ganzen genutzt
„Ich hab das verkürzt.“ $\boxed{\frac{1}{6} \textit{von} \frac{1}{5}}$  „Ich glaub ich hab einen Trick damit das schneller geht wie man das besser rein kriegt.“	Nenner als Seitenlängen (Vereinfachung)	Als Seitenlängen werden die Zahlen im Nenner genutzt

Die Entwicklung in der Handlungsaufgabe „Ganzes Finden“ ist dadurch gekennzeichnet, dass zunehmend Kriterien an das Ganze herangetragen werden, so dass es weiter vorstrukturiert und insofern weniger frei wählbar wird. **Verdichten** heißt für diese Handlungsaufgabe also: die Beziehung zwischen dem Ganzen und den Nennern zunehmend in den Blick zu nehmen und zu optimieren. Ist die Handlungsaufgabe durch das Entwickeln der Nutzbarkeit der Nenner als Seitenlängen schematisiert, wird sie nur durch Rückgriff darauf abgearbeitet, ohne sonderlich im Fokus zu sein. Dabei sind die weniger gut vorstrukturierten Konzeptionen des Ganzen nicht einfach nur vergessen, sondern sie sind im Konzept-in-Aktion ||Nenner als Seitenlänge|| verdichtet.

Fazit

Diese ersten Einblicke in ein komplexes Dissertationsprojekt (Glade 2015) deuten in der gebotenen Kürze an, wie sich Prozesse der fortschreitenden Schematisierung mit dem auf Vergnaud aufgebauten Analyseinstrument als Entwicklung durch Schematisierungsstufen in verschiedenen Handlungsaufgaben informativ beschreiben und besser verstehen lassen. *Verdichten* bedeutet dabei jedoch in den verschiedenen Handlungsaufgaben ganz unterschiedliches.

Literatur

Aebli, Hans (1981): Denken: das Ordnen des Tuns, Band II: Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta.

Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen – Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung. Mathematik lehren 162, 43-47. Online unter www.ko-si-ma.de

Glade, Matthias (2011): Vom Zeichnen zur Rechenregel - Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung zum Anteil vom Anteil. In Beiträge zum Mathematikunterricht, 303-306.

Glade, Matthias (2015, in Vorbereitung): Fortschreitende Schematisierung als Verdichtung – empirische Rekonstruktionen von Schematisierungsprozessen zum Anteil vom Anteil. Dissertation. Dortmund: Technische Universität.

Gravemeijer, Koeno / Cobb, Paul (2006): Design research from the learning design perspective. In van den Akker, J, Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. Routledge, London, 45-85.

Hußmann, Stephan, Leuders, Timo, Prediger, Susanne & Barzel, Bärbel (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) - ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422

Krämer, Sybille (2003): "Schriftbildlichkeit" oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In Horst Bredekamp und Sybille Krämer (Hrsg.): Bild, Schrift, Zahl, München: Fink 2003, S.157 – 176.

Prediger, Susanne / Schink, Andrea /Schneider, Claudia / Verschraegen, Jan (2013): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. In Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin, 143-164.

Treffers, Adri (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.- Reidel, Dordrecht.

Streefland, Leen (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research, Kluwer, Dordrecht.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), Theories of mathematical learning (S. 219-239). Lawrence Erlbaum: Mahwah, NY.